Title	Strong Partition Cardinal と Spector Forcing(公理的集合論と一般帰納関数論)
Author(s)	佐藤, 洋祐
Citation	数理解析研究所講究録 (1990), 728: 104-114
Issue Date	1990-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/101928
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
728 巻 1990 年 104-114

Strong Partition Cardinal と Spector Forcing

ICOT 佐藤洋祐 (Yosuke Sato)

概要 Michell Spector によって考案された Strong Partition Cardinal の存在を認める集合論のモデルの Generic extension について概説を与える.

§0 準備

定義 0.1 κ が Strong Partition Cardinal であるとは κ が Partition Property $\kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{\lambda}$ を任意の順序数 $\lambda < \kappa$ に対して満たすことと定義する.

以下の結果が知られている.

定理 0.2 κ が Strong Partition Cardinal

$\Longrightarrow$ κ は measurable cardinal

定理 0.3 κ が Strong Partition Cardinal

$\Longrightarrow$ AC_{κ} は成りたたない

定理 0.4　$\kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{\lambda} \implies \kappa \to (\kappa)^{\kappa}_{2^{\lambda}}$

§1　Spector Forcing

MをZF＋DCのStandard Transitiveモデルとし、MにおいてκはStrong Partition Cardinalであるとする。

定義 1.1　Forcing Condition $(\mathbb{P}, \leqslant)$を
$(\mathbb{P}, \leqslant) = ([\kappa]^{\kappa}, \subseteq)$で定義する。

定理 1.2　上のForcing ConditionにおけるGeneric extensionをM[G]とするとき、M[G]において以下が成りたつ。

(1)　Gはκ上のκ-complete nonprincipal ultrafilter

(2)　κ^{κ}/Gにはκ番目の要素がない、すなわちGはκ上のnon-well-founded measureになる。したがってDC(dependent choice)はなりたたない。

(3)　AC_{ω}(countable axiom of choice)はなりたつ。

定理 1.2の証明はいくつかの補題で構成されるが、それを述べる前に次の定義を与える。

定義 1.3　$p, q \in [\kappa]^\kappa$ に対し $pq \in [\kappa]^\kappa$ を p と q の合成として定義する．すなわち $\forall\alpha < \kappa$　$pq(\alpha) = p(q(\alpha))$．

補題 1.4　$\forall\alpha < \kappa$ $M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$

証明

$f \in M^\alpha \cap M[G]$ とする．$p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^\alpha$ なる任意の condition p に対し partition $F : [\kappa]^\kappa \to 2^\alpha$ を以下のように定める．

$F(q) \underset{def}{=} \{\beta < \alpha \mid \exists x \in M\ pq \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x\}$

ここで $\underset{\sim}{f}$ は f の name $\underline{M}$ は M に対応する述語．

M において κ は strong partition cardinal なので

$\kappa \to (\kappa)^\kappa_\alpha$ をみたす．したがって定理 0.4 により

$\kappa \to (\kappa)^\kappa_{2^\alpha}$ が成りたつ．

よって F は homogeneous set S をもつ．κ の部分集合で cardinality κ のものは $[\kappa]^\kappa$ の元と同一視できるので S を $[\kappa]^\kappa$ の元とみなすことができる．

さて　$r \leq pS \iff \exists s' \leq S$ $r = ps'$ に注意すると

$\forall r \leq pS\ \forall\beta < \alpha (\exists x \in M\ r \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x \iff \exists x \in M\ pS \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x)$

また $pS \leq p$ なので $pS \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^\alpha$．したがって

$\forall\beta < \alpha\ \exists r \leq pS\ \exists x \in M\ r \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

以上より

$\forall\beta < \alpha\ \exists x \in M\ pS \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

$\underset{\sim}{f}' \in M^{\alpha} \cap M$ を次のように定める.

$\forall \beta < \alpha \ \underset{\sim}{f}'(\beta) = x \underset{def}{\Longleftrightarrow} ps \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = x$

このとき $ps \Vdash \underset{\sim}{f}' = \underset{\sim}{f}$ がいえるので

$ps \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}$ が成りたつ.

以上より $\forall p \ p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^{\alpha} \Rightarrow \exists r \le p \ r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}$

が示された.

これにより $p \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}^{\alpha}$ なる任意の p に対し

$D = \{ r \in [X]^{\chi} \mid r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M} \}$ は p 以下で dense すなわち

$\forall q \le p \ \exists r \le q \ r \in D$ となる.

さて p を G の元としてとれるので $D \cap G \neq \emptyset$

よって $\exists r \in G \ r \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underline{M}$ すなわち $M[G] \models \underset{\sim}{f} \in \underline{M}$

したがって $f \in M$

q.e.d.

補題 1.5 任意の condition $p, q \in [X]^{\chi}$ に対し p, q が final segment を共有する. すなわちある $\alpha < \chi$ が存在して $p - \alpha = q - \alpha$ なら、任意の generic filter G に対し

$p \in G \Leftrightarrow q \in G$

証明

$p \in G \Rightarrow q \in G$ を示せば十分.

そのためには $\{ r \in [X]^{\chi} \mid r \le q \}$ が p 以下で dense になることをいえばよいが容易に示せる. q.e.d.

補題 1.6　$M^{\varkappa} \cap M[G] = M^{\varkappa} \cap M$

証明

$f \in M^{\varkappa} \cap M[G]$ とする．補題 1.4 より $\forall \alpha < \varkappa \ f \restriction \alpha \in M$

$p \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^{\varkappa} \ \& \ \forall \alpha < \varkappa \ f \restriction \alpha \in \underline{M}^{\varkappa}$ なる任意の condition

p に対し partition $F : [\varkappa]^{\varkappa} \to 2$ を以下のように定める．

$F(q) = 0$ iff $\exists x \in M \ pq \Vdash f \restriction \cap q = x$

ここで $\cap q$ は q の最小元を表わす．

$s \in [\varkappa]^{\varkappa}$ を F の homogeneous set とする

$ps \leq p$ より $ps \Vdash \underline{f} \in \underline{M}^{\varkappa} \ \& \ \forall \alpha < \varkappa \ f \restriction \alpha \in \underline{M}^{\varkappa}$

よって $\exists t \leq ps \ \exists x \in M \ t \Vdash f \restriction \cap s = x$

よって $\exists r \leq s \ \exists x \in M \ pr \Vdash f \restriction \cap s = x$

$\cap s = \cap (r \cup \{\cap s\})$ なので

$\exists r \leq s \ \exists x \in M \ pr \Vdash f \restriction \cap (r \cup \{\cap s\}) = x$

pr と $p(r \cup \{\cap s\})$ は final segment を共有するので補題 1.5

により $p(r \cup \{\cap s\}) \Vdash f \restriction \cap (r \cup \{\cap s\}) = x$

したがって $F(r \cup \{\cap s\}) = 0$

よって s が homogeneous であるので $F``[s]^{\varkappa} = \{0\}$

任意の $\alpha < s$ に対し $s' = (s - \alpha) \cup \{\alpha\}$ とおくと

$\cap s' = \alpha$，$s' \leq s$ より $\exists x \in M \ ps' \Vdash f \restriction \alpha = x$

ps' と ps は final segment を共有するので

$ps \Vdash f \restriction \alpha = x$　したがって任意の $\beta < \alpha$ に対し

$\exists z \in M \ p_S \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) = z$

αはいくらでも大きくとることができるので、これが任意の

$\beta < \kappa$ に対してなりたつ.

よって $p_S \Vdash \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{M}$ が補題1.4の証明と同様いえる.

したがって同様に $f \in M$ が成りたつ.

q.e.d.

(注) 実際には任意の順序数 αに対し

$M^\alpha \cap M[G] = M^\alpha \cap M$ が成りたつことが知られている.

補題 1.7　$M[G] \models \underset{\sim}{G}$ はκ上の κ-complete nonprincipal ultrafilter

証明

$(\underset{\sim}{P}, \leq)$ が splitting すなわち任意の condition p に対し incompatible な p の extension r, s が存在するので $G \notin M$. したがって Gは principal にはなりえない.

さて"$M[G] \models \underset{\sim}{G}$ はκ上の filter"は明らかなので次を示せば十分.

任意の$\delta < \kappa$に対し $\bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha = \kappa \Rightarrow \exists \alpha \ A_\alpha \in G$

補題 1.6により任意の$\alpha < \delta$ に対し $A_\alpha \in M$

よって補題 1.4 により $\langle A_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle \in M$

$\forall p \in [\kappa]^\kappa \ \bigcup_{\alpha<\delta} (p \cap A_\alpha) = p$ なので

$\overline{\overline{\bigcup_{\alpha<\delta}(p\cap A_\alpha)}} = \overline{\overline{p}} = \kappa$

Mでκがmeasurableなのでregularになることに注意すると

$\exists\alpha<\delta\ \overline{\overline{p\cap A_\alpha}} = \kappa.$

したがって $\forall p\in[\kappa]^\kappa\ \exists r\in[\kappa]^\kappa\ r\le p$ かつ $r\le A_\alpha$ for some $\alpha<\delta$.

よって $D=\{r\in[\kappa]^\kappa \mid r\le A_\alpha \text{ for some } \alpha<\delta\}$ は dense になる.

よって $\exists p\in G\cap D$ すなわち $\exists p\in G\ \exists\alpha\ p\le A_\alpha$

したがって $\exists\alpha\ A_\alpha\in G$

q.e.d.

補題 1.8 $\forall\alpha,\beta<\kappa\ M[G]\models\kappa\to(\kappa)^\alpha_\beta$

証明

Partition $F:[\kappa]^\alpha\to\beta$ に対し Mの中で

Partition $F':[\kappa]^\kappa\to\beta+1$ を次のように定める

$$F'(q)=\begin{cases}\text{the least } \eta<\beta \text{ such that } q\Vdash F(q\restriction\alpha)=\eta & \text{if exists}\\ \beta & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\{x\in[\kappa]^\kappa \mid x$ はF'の homogeneous set$\}$ は明らかにMに含まれ、dense なので $\exists s\in G$ s はF'の homogeneous set

$M[G]\models F:[\kappa]^\alpha\to\beta$ なので

$\exists r\le s\ \ r\Vdash F(s\restriction\alpha)=\eta$ for some $\eta<\beta$ となる.

$r\le s$ より $s\restriction\alpha=(r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha$

よって　$r \Vdash F((r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha)=\eta$

r と $r\cup(s\restriction\alpha)$ は final segment を共有するので

$r\cup(s\restriction\alpha)\Vdash F((r\cup(s\restriction\alpha))\restriction\alpha)=\eta$

したがって　$F'(r\cup(s\restriction\alpha))=\eta$

よって　$F'``[s]^\kappa=\{\eta\}$

$\forall t\in[s]^\alpha$　$(s-\cup t)\cup t\in[s]^\kappa$ なので

$(s-\cup t)\cup t\Vdash F(\{(s-\cup t)\cup t\}\restriction\alpha)=\eta$

$\{(s-\cup t)\cup t\}\restriction\alpha=t$ なので

$(s-\cup t)\cup t\Vdash F(t)=\eta$

s と $(s-\cup t)\cup t$ は final segment を共有するので

$(s-\cup t)\cup t\in G$　したがって $M[G]\models F(t)=\eta$

よって　s は F の homogeneous set になる

q.e.d.

補題 1.9　κ^κ/G には κ 番目の要素がない

証明

補題 1.4 の証明と同様に $f\in\kappa^\kappa$ に対し

$p\Vdash f$ is not constant almost everywhere を満たす任意の condition p に対し condition $q\le p$ と $g\in\kappa^\kappa$ が存在して

$q\Vdash g<f$ almost everywhere & g is not constant almost everywhere

が成りたつことを示せば十分.

ここで $p\in G$ としてもよいことに注意する.

Partition $F:[X]^2\longrightarrow 3$ を次のように定義する.

$$F(\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad f(\alpha)<f(\beta)\\ 1 & \text{if} \quad f(\alpha)=f(\beta)\\ 2 & \text{if} \quad f(\alpha)>f(\beta)\end{cases}$$

さて F の homogeneous set が G からとれるので

$P\in G$ とあわせて homogeneous set $X\leq P$ をとることができる.

もし $F''[X]^2=\{1\}$ なら

$X\Vdash f$ is constant almost everywhere

よって $M[G]\models f$ is constant almost everywhere

となり矛盾.

もし $F''[X]^2=\{2\}$ なら

$f(X(0))>f(X(1))>\cdots\cdots$

となり矛盾

よって $F''[X]^2=\{0\}$ でなければならない.

さて $q\in[X]^{\varkappa}$ を $q=\{X(\beta+1)\mid\beta<\varkappa\}$ とおき

$g\in\varkappa^{\varkappa}$ を $g(\alpha)=\begin{cases}f(X(\beta)) & \text{if} \quad \alpha=X(\beta+1)\\ 0 & \quad\quad \alpha\notin q\end{cases}$

で定義する.

任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in q$ に対し $\alpha_1 < \alpha_2$ なら、ある $\beta_1 < \beta_2$ があって、$\alpha_1 = \chi(\beta_1 + 1) < \alpha_2 = \chi(\beta_2 + 1)$ とおけるので

$F''[\chi]^2 = \{0\}$ より $g(\alpha_1) = f(\chi(\beta_1)) < f(\chi(\beta_2)) = g(\alpha_2)$

よって $q \Vdash g$ is not constant almost everywhere

また任意の $\alpha \in q$ に対し $\alpha = \chi(\beta + 1)$ とおけ

$g(\alpha) = f(\chi(\beta)) < f(\chi(\beta + 1)) = f(\alpha)$

よって $q \Vdash g < f$ almost everywhere

q. e. d.

補題 1.10　任意の $\alpha < \chi$ に対し

$$M \models AC_\alpha \Rightarrow M[G] \models AC_\alpha$$

証明

f を $M[G]$ で定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha \ f(\beta) \neq \emptyset$ とする.

$p \Vdash \underset{\sim}{f}$ は定義域を α とする関数で $\forall \beta < \alpha \ \underset{\sim}{f}(\beta) \neq \emptyset$

なる任意の condition p に対し partition

$F : [\chi]^\chi \to \alpha + 1$ を次のように定義する.

$$F(q) = \begin{cases} \text{the least } \beta < \alpha \text{ if exists such that} \\ \qquad p q \Vdash \tau \in \underset{\sim}{f}(\beta) \text{ なる term } \tau \text{ が存在しない} \\ \alpha \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

F の homogeneous set を S とする

もしある $\beta<\alpha$ に対し $F''[S]^x=\{\beta\}$ なら

$\forall r \le ps$ $r \Vdash \tau \in \underset{\sim}{f}(\beta)$ なる term τ が存在しない.

$ps \le p$ より $ps \Vdash \underset{\sim}{f}(\beta) \ne \emptyset$ なので矛盾

よって $F''[S]^x=\{\alpha\}$

$M \vDash AC_\alpha$ なので $\langle \tau_\beta \mid \beta<\alpha \rangle \in M$ をとり

$\forall \beta<\alpha$ $ps \Vdash \tau_\beta \in \underset{\sim}{f}(\beta)$ とできる.

これを使って $ps \Vdash \underset{\sim}{f}$ が choice function をもつ

が示される.

よって, 前と同様にして $M[G] \vDash AC_\alpha$ が成りたつ.

q. e. d.

参考文献

[1] J. M. HENLE ; Aspect of choiceless combinatorial set theory, Ph. D. Thesis MIT 1976

[2] E. M. Kleinberg ; Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness, Lecture Notes in Mathematics vol. 612 Springer Berlin, 1977

[3] M. Spector ; A measurable cardinal with a nonwellfounded ultrapower, The Journal of Symbolic Logic vol. 45, 1980